

# ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA

## [Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

**PROFESSORE:** Maria Lucia Sampoli (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=355>)

**LINK AL CORSO:**

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54945&aa=2014>

**FREQUENTAZIONE:** Facoltativa.

# ERRORI ED ARITMETICA FINITA

## EFFICIENZA DI UN METODO NUMERICO

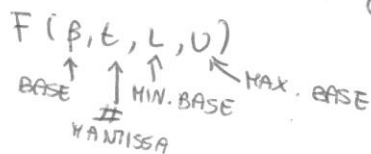
- ACCURATEZZA: Soluzione numerica vicina alla soluzione del problema matematico;
- FACILTA' DI IMPLEMENTAZIONE: Traduzione in un algoritmo facile e semplice implementazione in un codice

## FONTI DI ERRORE

- TRONCAMENTO: Errore legato alla definizione di un metodo numerico  
$$\frac{f(x) - \hat{f}(x)}{f(x)}$$
- CONVERGENZA: Soluzione come limite di una successione iterata da un intervallo di arresto  
$$\frac{\hat{g}(x) - g(x)}{g(x)}$$
- ARROTONDAMENTO: Errore dovuto dall'aritmetica del calcolatore  
$$\frac{\hat{g}(x + \delta x) - \hat{g}(x)}{\hat{g}(x)}$$

## RAPPRESENTAZIONE NUMERI

- INTERI:  $d_0 d_1 \dots d_n$ ,  $d_0 = (\neq \text{ oppure } 1)$
- REALI:  $d_0 d_1 \dots d_t c_0 c_1 \dots c_s$
- REALI VIRGOLA MOBILE:  $x = \pm (d_1 d_2 \dots)_t \cdot \beta^e$
- NUMERI MACCHINA:  $\tilde{x} = \hat{f}(x) = \pm (d_1 d_2 \dots d_t) \cdot \beta^e$



## ERRORI RAPPRESENTAZIONE

- ARROTONDAMENTO: # mantissa  $\geq t$
- UNDERFLOW:  $e \leq L$
- OVERFLOW:  $e > U$   $[+\infty]$ .

## ERRORI

- ASSOLUTO:  $e_A = |x - f(x)|$

- RELATIVO:  $e_r = \frac{|x - f(x)|}{|x|} = \frac{e_A}{|x|}$

↑  
Informazione sulla precisione

## PRECISIONE

PRECISIONE: # cifre mantissa.

Determinazione di  $f(x)$ :

- TRONCAMENTO:  $f(x) = \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_t \cdot \beta^e$

$$e_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq \beta^{1-t} = \epsilon_m$$

- ARROTONDAMENTO:

$$f(x) = \begin{cases} \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_t \cdot \beta^e, & d_{t+1} < \beta/2 \\ \pm d_1 d_2 d_3 \dots (d_t + 1) \cdot \beta^e, & d_{t+1} \geq \beta/2 \end{cases}$$

$$e_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t} = \epsilon_m$$

$$f(x) = x(1 + e), \quad |e| < \epsilon_m$$

↑ Precisione macchina.

## COMPLESSITÀ DI CALCOLO

- ALGORITMO: Successione finita di istruzioni, che consentono di passare dai dati ai risultati in un tempo finito

- GENERALITÀ: Risolve una classe di problemi

- OTTIMALITÀ: Rispetto al tempo, # istruzioni...

- BENCONDIZIONAMENTO: Problema ben condizionato se a piccole variazioni sui dati seguono piccole variazioni sui risultati.

- STABILITÀ: Algoritmo stabile se amplifica poco gli errori di arrotondamento introdotti nelle singole operazioni. La stabilità dell'algoritmo è data dal bencondizionamento delle operazioni che lo compongono.

=> Algoritmo stabile se numero limitato e l'ingresso degli errori

(2)

# EQUAZIONI E SISTEMI NON LINEARI I

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists x: f(x) = \beta$ ,  $x$  radice di  $f$ .

## METODI ITERATIVI

Consentono di approssimare la soluzione con una certa precisione.

A partire da un'approssimazione iniziale  $x^{(0)}$ , si costruisce  $\{x^{(k)}\}$  che converga alla radice cercata.

### PROPRIETÀ:

#### - VELOCITÀ DI CONVERGENZA

Dati  $\{x^{(k)}\} \rightarrow \alpha$ ,  $e^{(m)} = x^{(m)} - \alpha$ ,  $\exists p, c \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ ,  $c \neq 0$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|e^{(m+1)}|}{|e^{(m)}|^p} = C$$

← Fattore di convergenza.  
← Ordine di convergenza.

#### - SCELTA DI $x^{(0)}$ .

=> Convergenza locale: Convergenza dipende dalla distanza  $[x^{(0)}, \alpha]$ .

=> Convergenza globale: Convergenza non dipende dalla distanza  $[x^{(0)}, \alpha]$ .

#### - CRITERIO DI ARRESTO

$$e_{rel} = \frac{|x^{(k)} - \alpha|}{|\alpha|} < tol_{rel}$$

$$\Rightarrow |e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha| = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

$$e_{rel} = \frac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}|} < tol_{rel} \quad ; \quad e_{ass} = |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < tol_{ass}$$

$$\Rightarrow |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq tol_{rel} (x^{(k+1)}) + tol_{ass}$$

## BISEZIONE

I)  $f(x)$  continua in  $[a, b]$

II)  $f(a) f(b) < 0 \Rightarrow \textcircled{T}$  ZERI

$$a_1 = a, b_1 = b$$

per  $i = 1, \dots, m$

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}, f(c_i)$$

Se  $f(c_i) f(a_i) > 0$ ,  $a_{i+1} = c_i, b_{i+1} = b_i$

se  $f(c_i) f(a_i) < 0$ ,  $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = c_i$

Se  $f(c_i) = 0$ ,  $\alpha = c_i$

Ci arrestiamo quando:  $|f(c_i)| \leq \varepsilon$ ,  $|b_i - a_i| \leq \varepsilon$

$$b_m - a_m = \frac{b_0 - a_0}{2^m}$$

$$\alpha = c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$$

$$|e_m| = |\alpha - c_m| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{m+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow m \geq \log_2 \left( \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right) - 1$$

-> metodo converge sempre alla soluzione cercata

-> Convergenza lenta

## REGOLA FALSI'

Consideriamo anche i valori di  $f$  negli estremi.

Si approssima la soluzione con l'intersezione della retta passante per  $(a_k, f(a_k)), (b_k, f(b_k))$ .

$$[a_0, b_0] \Rightarrow f(a_0) f(b_0) < 0$$

Finché non è raggiunto l'arresto:

$$w_i = \frac{f(b_i) a_i - f(a_i) b_i}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Se  $f(a_i) f(w_i) < 0$ ,  $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = w_i$

altrimenti  $a_{i+1} = w_i, b_{i+1} = b_i$

$$i = i + 1$$

$$\alpha = w_i$$

-> metodo genera successione di intervalli decrescenti

-> più veloce rispetto alla bisezione.

-> in generale  $[a_i, b_i] \not\rightarrow \emptyset$ ,  $i \rightarrow +\infty$ .

-> converge rapidamente

-> v. convergenza lenta.

④

## SECANTI

Dato i valori iniziali  $x^{(-1)}, x^{(0)}$ , si costruisce

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}), \quad k \geq 0$$

→ Converge se  $x^{(-1)}$  e  $x^{(0)}$  sono vicini ad  $\alpha$ .

→ ⊕ Se  $f(x) \in C^2(I)$ ,  $I$  intorno di  $\alpha$ ,  $f''(\alpha) \neq 0$ , e  $x^{(-1)}, x^{(0)} \in I$  e sono vicini ad  $\alpha$ , allora  $\{x^{(k)}\} \rightarrow \alpha$  in modo superlineare con  $p = 1,63$ .

## NEWTON

Sviluppo  $f$  in serie di Taylor e mi arresto al primo ordine.

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x) f'(\xi), \quad \xi \in (\alpha, x)$$

assumendo  $f'(\alpha) \neq 0$  e v.i.  $x^{(k)}$ :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0$$

→ approssimo la soluzione con l'intersezione della retta tangente con la retta tangente in  $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ .

→ convergenza locale e quadratica.

⊕  $f(x)$  suff. regolare  $\Rightarrow$  conv. quadratica con  $\mu = 1$ .

⊕  $f(x)$  suff. regolare  $\Rightarrow$  conv. lineare con  $\mu > 1$ . ( $C = \frac{m-1}{m}$ )

## NEWTON NON LINEARE

$$\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x}^* \in \mathbb{R}^m: \vec{F}(\vec{x}^*) = 0$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) [J_{\vec{F}}(\vec{x}^{(k)})]^{-1}, \quad J_{\vec{F}}(\vec{x}^{(k)}) = \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i}(\vec{x}^{(k)}) \right)$$

→ Converge se  $J_{\vec{F}}$  è non singolare e  $\vec{x}^{(0)}$  è suff. vicino.

→ convergenza quadratica. (MAGGIORE SENSIBILITÀ A  $x^{(k)}$ )  
COSTO ELEVATO  
SOLUZIONI NON ACCURATE

## VARIANTI:

- Valutazione esatta di  $J_{\vec{F}}$ : Si mantiene la stessa  $J_{\vec{F}}$  per un certo numero di iterazioni.

- Risoluzione imediata di sistemi lineari: Si risolvono sistemi con metodi iterativi.

- Appx. Jacobiana con app. incrementale

## METODI ITERAZIONE FUNZIONALE

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

Successione  
approssimazioni

↑  
Funzione iterativa

$$\textcircled{1} x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), k \geq 0, x^{(0)} \text{ assegnato.}$$

Se  $g$ :

i)  $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$

ii)  $g \in C^1[a, b]$

iii)  $\exists k < 1: |g'(x)| < k, \forall x \in [a, b]$

$\Rightarrow g$  ha un unico pto fisso  $\alpha \in [a, b]$  e  $\{x^{(k)}\} \rightarrow \alpha \forall x^{(0)} \in [a, b]$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = g'(\alpha)$$

### OTROWSKI

$\alpha$  pto fisso di  $g \in C^1[\alpha-p, \alpha+p]$ . Se  $\forall x^{(0)} \in [\alpha-p, \alpha+p]$ ,

$|g'(x)| < 1, \forall x \in [\alpha-p, \alpha+p]$ :

i)  $x^{(k)} \rightarrow \alpha$

ii)  $x^{(k)} \in [\alpha-p, \alpha+p]$

### NEWTON

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow f \in C^2, f'(\alpha) \neq 0: g'(x) = \frac{f''(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(\alpha) = 0.$$

$\rightarrow$  Convergenza locale sempre

$\rightarrow$  Convr. quadratica,  $\mu = 1$

Convr. lineare,  $\mu > 1$

$$\textcircled{1} f \in C^2[\alpha, \alpha+p]:$$

i)  $f(x)f''(x) > 0$  in  $(\alpha, \alpha+p)$

ii)  $f''(x) \neq 0$  in  $(\alpha, \alpha+p)$

$\Rightarrow \forall x^{(0)} \in (\alpha, \alpha+p), g(x)$  decresce in modo monotono cul  $\alpha$ .

⑥

## METODI NUMERICI PER SISTEMI LINEARI QUADRATI

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , se  $\det(A) \neq 0$ ,  $\exists! x \in \mathbb{R}^m : Ax = b$

→ METODI DIRETTI

Trasformo il sistema in un sistema triangolare, attraverso un numero finito di operazioni, di cui posso calcolare la soluzione

→ METODI ITERATIVI

Soluzione come limite di una successione

### CONDIZIONAMENTO

Perturbazioni:  $\varepsilon F$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\varepsilon g$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$

$$(A + \varepsilon F)x = b + \varepsilon g, \quad x(\emptyset) = x$$

$$\text{se } \det(A + \varepsilon F) \neq 0 \Rightarrow x(\varepsilon) = (A + \varepsilon F)^{-1}(b + \varepsilon g)$$

$$\text{Definendo: } Fx(\varepsilon) + (A + \varepsilon F)x(\varepsilon) = g.$$

$$\text{Per } \varepsilon = \emptyset, \quad Fx(\emptyset) + Ax(\emptyset) = g \Rightarrow x(\emptyset) = A^{-1}(g - Fx(\emptyset))$$

$$\text{In serie: } x(\varepsilon) = x(\emptyset) + \varepsilon x'(\emptyset) + o(\varepsilon^2) \Rightarrow x(\varepsilon) - x(\emptyset) \approx \varepsilon x'(\emptyset)$$

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x(\emptyset)\|}{\|x(\emptyset)\|} \approx \frac{\|\varepsilon x'(\emptyset)\|}{\|x(\emptyset)\|} = \varepsilon \frac{\|A^{-1}(g - Fx(\emptyset))\|}{\|x(\emptyset)\|}$$

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x(\emptyset)\|}{\|x(\emptyset)\|} \leq \varepsilon \frac{\|A^{-1}\| \|g - Fx(\emptyset)\|}{\|x(\emptyset)\|} \leq \varepsilon \|A^{-1}\| \left( \frac{\|g\|}{\|x(\emptyset)\|} + \|F\| \right)$$

$$= \varepsilon \|A^{-1}\| \|A\| \left( \frac{\|g\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|F\|}{\|A\|} \right) \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \|A\|}_{K(A)} \left( \frac{\|\varepsilon g\|}{\|b\|} + \frac{\|\varepsilon F\|}{\|A\|} \right)$$

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|}{\|x\|} \leq K(A) \left( \frac{\|\varepsilon g\|}{\|b\|} + \frac{\|\varepsilon F\|}{\|A\|} \right).$$

$$K(A) \geq 1.$$



## FATTORIZZAZIONE LR

Se  $\exists L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , triangolare inferiore,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  triangolare superiore:

$$A = LR$$

$$\Rightarrow Ax = b \Leftrightarrow LRx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Rx = y \end{cases}$$

⊕  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\det(A_k) \neq 0$ ,  $l_{11} = \dots = l_{mm} = 1$  (FATT. SOLITILE)

$$\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^m r_{ii}$$

## ELIMINAZIONE DI GAUSS E PIVOTING

Permette di risolvere il sistema lineare  $Ax = b$  eliminando  
via via le incognite, trasformando il sistema iniziale  
in un sistema del tipo  $Rx = y$ .

Il problema in tale metodo insorge quando l'elemento di  
pivot scelto ( $a_{kk}^{(k-1)}$ ) è uguale a zero e perciò non  
permette di rendere la matrice triangolare superiore.

Per far sì che l'elemento di pivot sia qualitativamente  
buono si effettuano scambi di righe e colonne.

Questa serie di scambi prende il nome di pivoting.

Quando si scambia solo righe o colonne

$$\Rightarrow \text{PIVOTING PARZIALE } \left( \frac{m^2}{2} \right)$$

Quando si scambia sia righe che colonne

$$\Rightarrow \text{PIVOTING TOTALE } \left( \frac{m^3}{3} \right)$$

## FATTORIZZAZIONE DIRETTA

$$A^T = A$$

$$D := \begin{bmatrix} r_{11} & & & \\ & r_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1m} \\ & 1 & u_{23} & \dots & u_{2m} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = DU, \quad A = LDU, \quad A^T = U^T D L^T$$

$$A = A^T \Rightarrow L = U^T$$

## FATTORIZZAZIONE CHOLESKI

$A^T = A$ ,  $x^T A x > \delta$ ,  $\forall x \neq \emptyset$ ,  $x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \det(A) > \delta$

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} r_{11}^{1/2} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & r_{22}^{1/2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \dots & \emptyset & r_{mm}^{1/2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} A &= LDU = LDL^T = LD^{1/2} D^{1/2} L^T \\ S &= LD^{1/2} \\ A &= SS^T \end{aligned}$$

$\rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simmetrica e def. positiva sse:  $A = SS^T$ .

## METODI ITERATIVI

$Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x^* \in \mathbb{R}^m$

Costruire da  $x^{(p)} \in \mathbb{R}^m$  una successione  $\{x^{(k)}\}$ :

i)  $x^{(k)} \rightarrow x^*$

ii)  $x^{(k)}$  facile da costruire

$$A = P - N \Rightarrow x = P^{-1} N x + P^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = P^{-1} N x^{(k)} + P^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + g$$

$\uparrow$  Matrice di iterazione.

$e^{(k)} = x - x^{(k)}$ ; errore al passo  $k$ .

$$e^{(k+1)} = B e^{(k)} = B^{k+1} e^{(0)}$$

Metodo convergente se  $\|B\| < 1$

Metodo convergente se  $\rho(B) < 1$ ,  $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|$ ,  $\lambda_i \in B$ .

Costo: num. iterazioni • costo prodotto  $B$  per un vettore

$$\Rightarrow A = D - E - F$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & a_{22} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \dots & \emptyset & a_{mm} \end{bmatrix} \quad E = - \begin{bmatrix} a_{21} & \dots & \dots & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,m-1} \end{bmatrix} \quad F = - \begin{bmatrix} \emptyset & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \dots & \emptyset & a_{m-1,m} \end{bmatrix}$$

## JACOBI

$$P = D$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$B_J = D^{-1}(E+F) = D^{-1}(D-A) = I - D^{-1}A$$

$\Rightarrow$  convergono se  $A$  è diagonale dominante.

## GAUSS-SIEDEL

$$P = D - E$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$B_{GS} = (D-E)^{-1}F = I - (D-E)^{-1}A$$

(3)

## APPROSSIMAZIONE E INTERPOLAZIONE DI DATI E FUNZIONI

### CRITERI DI MISURAZIONE D'ERRORE

- NORMA 1 :  $\min \sum_{i=1}^m |E_i|$
- NORMA 2 :  $\min \sum_{i=1}^m |E_i|^2$
- NORMA  $\infty$  :  $\min \max |E_i|$

### INTERPOLAZIONE

Dati  $(x_i, f_i)$ ,  $x_i \in [a, b]$  ( $x_i$  p.t.i fondamentali e  $x_i \neq x_j$  per  $i \neq j$ )  
ed un insieme  $\varphi_j(x)$  definite in  $[a, b]$  l.m. l.m.d.p.

determinate :  $g(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \varphi_j(x)$

tale che :  $g(x_i) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \varphi_j(x_i) = f_i$

### INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$\varphi_j(x) = x^j$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^j = P_m(x)$$

$$\Rightarrow H \alpha = f, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{bmatrix}$$

### POLINOMIO INTERPOLANTE NELLA FORMA DI LAGRANGE

assegnati  $(x_i, f_i)$ , definiamo  $l_0(x), \dots, l_m(x)$ :  $l_j(x)$  è un polinomio di grado  $m$  e  $l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$P_m(x_i) = \sum_{j=0}^m l_j(x_i) f_j = f_i$$

$$\text{Basi di Lagrange : } l_j(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^m (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^m (x_j - x_i)}$$

## APPROSSIMAZIONE

Dati  $(x_i, f_i)$ , con  $x_i \in [a, b]$ , cercare una funzione  $g(x)$  che passi vicino ad  $x_i$ .

misurare:  $|g(x_k) - f_k|$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} g(x_1) - f_1 \\ \vdots \\ g(x_m) - f_m \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (g(x_i) - f_i)^2}$$

$\Rightarrow$  Interpolazione è un caso particolare di approssimazione quando il grado del polinomio è uguale al numero dei punti - 1.

## SPLINES

Funzioni polinomiali a tratti che usano interpolanti polinomiali di grado basso, spezzando l'intervallo in considerazioni in tanti sottointervalli ed interpolando in ciascun intervallo pochi punti.

assegnato  $[a, b]$  e  $n$  nodi  $a = y_0 \dots y_m = b$ , una Spline di grado  $m$  e nodi  $y$  è una funzione polinomiale a tratti:

$$\begin{cases} S_{m,y}(x) \in P_m & x \in [y_i, y_{i+1}] \\ S_{m,y}(x) \in C^{m-1}([a, b]) \end{cases}$$

## B-SPLINES

Base stabile per lo spazio delle Splines e può essere definita per ricorrenza a partire da:

$$B_{i,\phi} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \phi & \text{se } x < x_i, x > x_{i+1} \end{cases}$$

$\rightarrow$  Tutte positive

$\rightarrow$  Supporto compatto

$\rightarrow$  Partiscono l'unità

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - y_i}{y_{i+m} - y_i} B_{i,m-1}(x) + \left( \frac{y_{i+m+1} - x}{y_{i+m+1} - y_{i+1}} \right) B_{i+1,m-1}(x)$$

## SPLINES INTERPOLANTI NEI NODI

Quando i nodi della Spline coincidono con i p.ti di Interpolazione.

Le più usate sono le Splines cubiche.

## QUADRATURA:

Approssimazione dell'area sottesa dalla curva data dal grafico della funzione integranda con l'area di quadrilateri sottesi.

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

$$I_{m+1}[f] = \sum_{i=0}^m w_i f(x_i) \quad , \quad \begin{array}{l} x_i : \text{masse} \\ w_i : \text{pesi} \end{array}$$

## FORMULE INTERPOLATORIE

Approssimare  $f(x)$  con il polinomio interpolante:

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^b L_m(f, x) dx}_{\text{POLINOMIO INTERPOLANTE}} + \underbrace{\int_a^b E_m(f, x) dx}_{\text{ERRORE}}$$

$$E_{m+1}[f] = I[f] - I_{m+1}[f]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m w_i f(x_i)$$

$m=1 \Rightarrow$  TRAPEZI

$m=2 \Rightarrow$  SIMPSON

## PRECISIONE

Bontà con cui  $\sum_{i=0}^m w_i f(x_i)$  approssima  $\int_a^b f(x) dx$ .

## FORMULE COMPOSITE

Suddividere  $[a, b]$  in  $N$  intervalli  $[z_k, z_{k+1}]$ ,  $k=0 \dots N-1$  e su ciascuno applicare una formula di ordine basso.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} I_{m+1}^{(k)}[f]$$